

מבחן טרימסטר א' במתמטיקה

יש לפתור את כל השאלות!

אין להשתמש במחשבוני! אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!
 סעיפים שונים באותה שאלה שווים בניקודם עד כדי נקודה, אלא אם רשום אחרת!
בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!
כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!

חלק א' – שעתיים ורבע**שאלה 1 - 16%**

8% א. צייר את גרף הפונקציה $f(x) = ||x^2 + x - 2| + x^2 + 5x - 3|$

8% ב. עבור אילו ערכים של m גרף הפונקציה חותך את הישר $y = m$
 (1 בשתי נקודות?
 (2 בשלוש נקודות?)

שאלה 2 - 18%

נתונה המשוואה $x^2 - 3ax + 15 + a = 0$.

6% א. עבור אילו ערכים של הפרמטר a יש למשוואה שני שורשים ממשיים α, β המקיימים $\beta = 2\alpha$?

6% ב. הוכח שלא קיים ערך של הפרמטר a כך שלמשוואה הנתונה יש שורש אחד חיובי ושורש שני הנמצא בקטע $[-2, -1]$.

6% ג. הבע את הביטוי $(\alpha^2 - 1) \cdot (\beta^2 - 1)$ באמצעות a כאשר α, β שורשים של המשוואה הנתונה.

שאלה 3 - 20%

10% א. פתור: $\log_4 x + \log_x 2 - \log_4 \sqrt{x} \leq 1$.

10% ב. פתור: $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$.

שאלה 4 - 15%

5% א. הוכח לפי ההגדרה שהפונקציה $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ עולה בתחום הגדרתה.

10% ב. פתור: $2 \left(16^{\log_9 x + 1} - 2^{4 \log_3 \sqrt{x}} \right) + 15 \cdot 4^{2 \log_3 x} \leq 15 \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}$

בהצלחה!

מבחן טרימסטר א' במתמטיקה

. יש לפתור את כל השאלות!

אין להשתמש במחשבוני! אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!
סעיפים שונים באותה שאלה שווים בניקודם עד כדי נקודה, אלא אם רשום אחרת!
בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!
כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדרך הנוסחאות – חייבת הוכחה!

חלק ב' – שעה ורבע

יש לפתור את השאלות הבאות רק באמצעות גיאומטריה-המישור.
כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!
תזכורת! – חובה לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה ולא ביד חופשית!

שאלה 5 – 16%

משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R.
דרך קודקוד C מעבירים משיק.
מרחק המשיק מקודקוד A הוא $AD = m$
ומרחק המשיק מקודקוד B הוא $BE = n$.
(הדרכה: מעבירים קוטר דרך קודקוד C)

9% א. הוכח: $CE = \sqrt{n(2R - n)}$. (שים לב שבאופן דומה גם $CD = \sqrt{m(2R - m)}$).

7% ב. חשב את שטח המשולש ABC כאשר $2R = 25, m = 16, n = 9$.

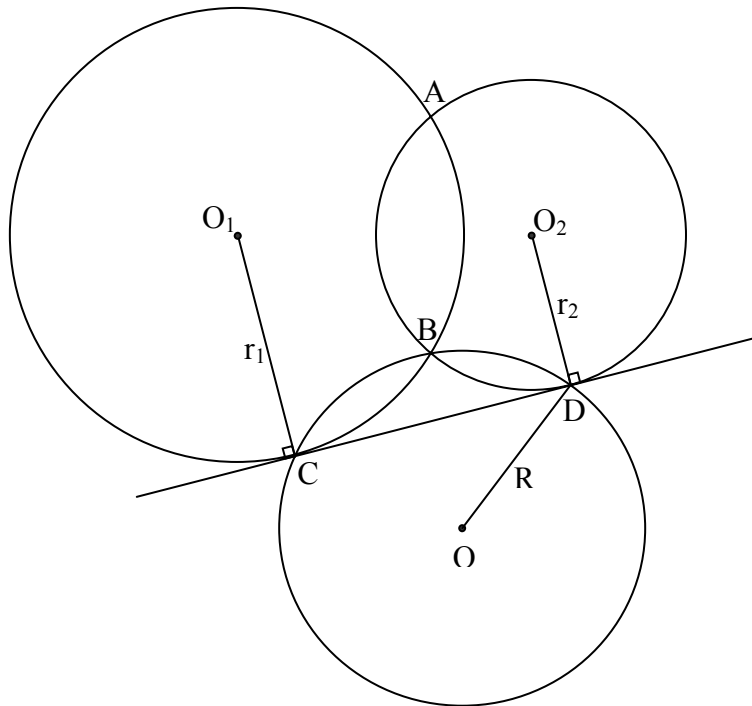
שאלה 6 – 15%

לשני מעגלים שנחתכים בנקודות A ו-B
מעבירים מצד B משיק משותף CD
כך ש- C על המעגל שמרכזו O_1 ורדיוסו r_1
ו-D על המעגל שמרכזו O_2 ורדיוסו r_2 .
דרך הנקודות D, C, B
מעבירים מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
הוכח:

5% א. OO_1 חוצה את BC.

5% ב. $\angle BO_1O = \angle BCD = \angle BOO_2$
(שים לב שבאופן דומה מוכיחים
ש- $\angle BO_2O = \angle BCD = \angle BOO_1$.)

5% ג. $R = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$. (רמז: המשולשים BOO_1 ו- BOO_2 דומים)

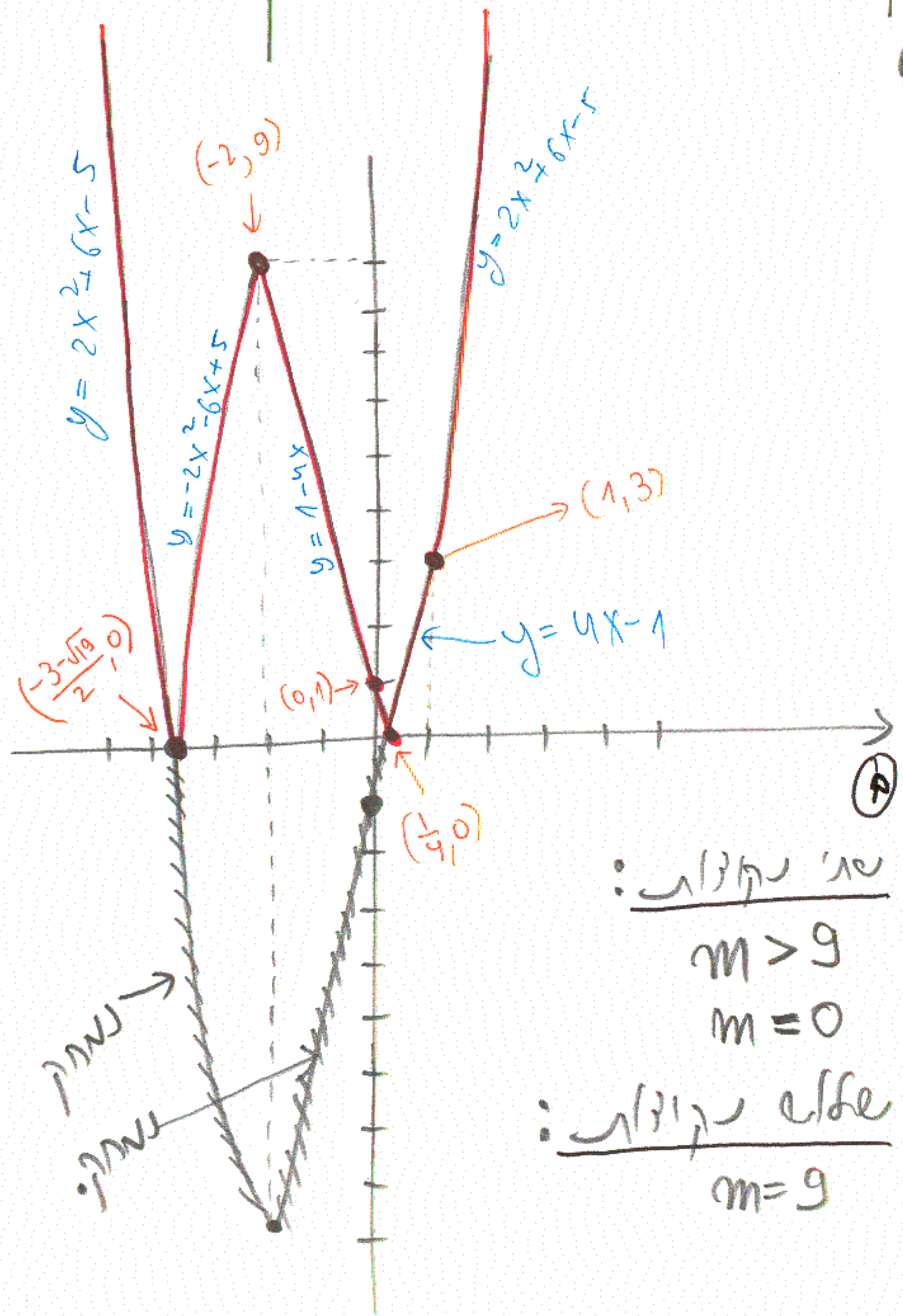


בהצלחה!

(k)

(1 nkte)

$$y = \left| |x^2 + x - 2| + x^2 + 5x - 3 \right| = m$$



: אין קוואל

$$m > 9$$

$$m = 0$$

: אין קוואל

$$m = 9$$

$$y = |x^2 + x - 2| + x^2 + 5x - 3$$

$$y = |(x+2)(x-1)| + x^2 + 5x - 3$$

$x < -2$	$-2 \leq x \leq 1$	$x > 1$
$y = 2x^2 + 6x - 5$	$y = -x^2 - x + 2 + x^2 + 5x - 3$	$y = x^2 + x - 2 + x^2 + 5x - 3$
	$y = 4x - 1$	$y = 2x^2 + 6x - 5$
		$\frac{-6 \pm \sqrt{36 + 40}}{4}$
		$\frac{-6 \pm \sqrt{76}}{4}$
		$\frac{-6 - \sqrt{76}}{4} =$
		$-1.5 - \frac{\sqrt{76}}{4} = -1.5 - \sqrt{\frac{76}{16}}$
		$-1.5 - \sqrt{\frac{19}{4}} \quad \sqrt{\frac{25}{4}} \quad \sqrt{\frac{16}{4}}$
		$\frac{5}{2} \quad 2$
		$-1.5 - 2.5 = -4$
		$-1.5 - 2 = -3.5$

(2) $\alpha \neq \beta$

$$x^2 - 3ax + 15 + a = 0$$

$$\textcircled{k} \quad \beta = 2\alpha \rightarrow \alpha + \beta = 3a \Rightarrow 3\alpha = 3a \Rightarrow \alpha = a$$

$$\rightarrow \alpha \cdot \beta = 15 + a \Rightarrow 2\alpha^2 = 15 + a$$

\Downarrow

$$2\alpha^2 - \alpha - 15 = 0$$

$$2\alpha^2 - 6\alpha + 5\alpha - 15 = 0$$

$$2\alpha(\alpha - 3) + 5(\alpha - 3) = 0$$

$$(\alpha - 3)(2\alpha + 5) = 0$$

$$\alpha = 3$$

$$a = 3$$

$$\alpha = -\frac{5}{2}$$

$$a = -2.5$$

\Downarrow

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$(x - 6)(x - 3) = 0$$

$$x = 6 \checkmark$$

$$x = 3 \checkmark$$

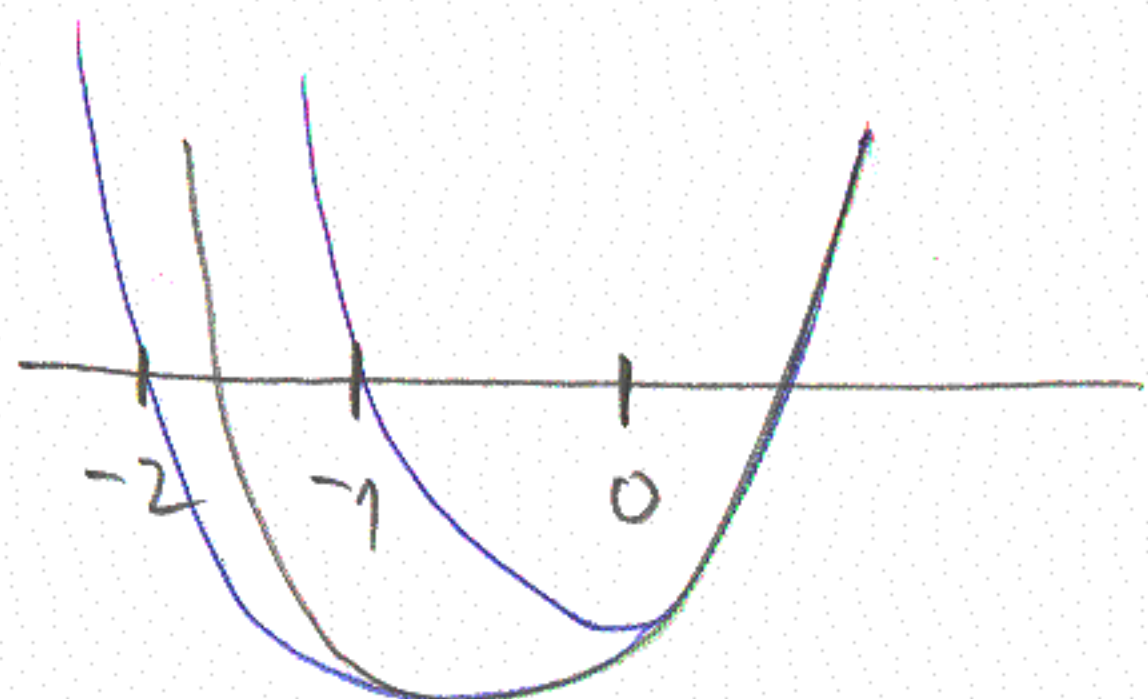
$$x^2 + 7.5x + 12.5 = 0$$

$$(x + 5)(x + 2.5) = 0$$

$$x = -5 \checkmark$$

$$x = -2.5 \checkmark$$

$\textcircled{?}$



$$F(0) < 0$$

$$F(-1) \leq 0$$

$$F(-2) \geq 0$$

$x_1 > 0$

$$-2 \leq x_2 \leq -1$$

$$15 + a < 0$$

$$a < -15$$

$$1 + 3a + 15 + a \leq 0$$

$$16 + 4a \leq 0$$

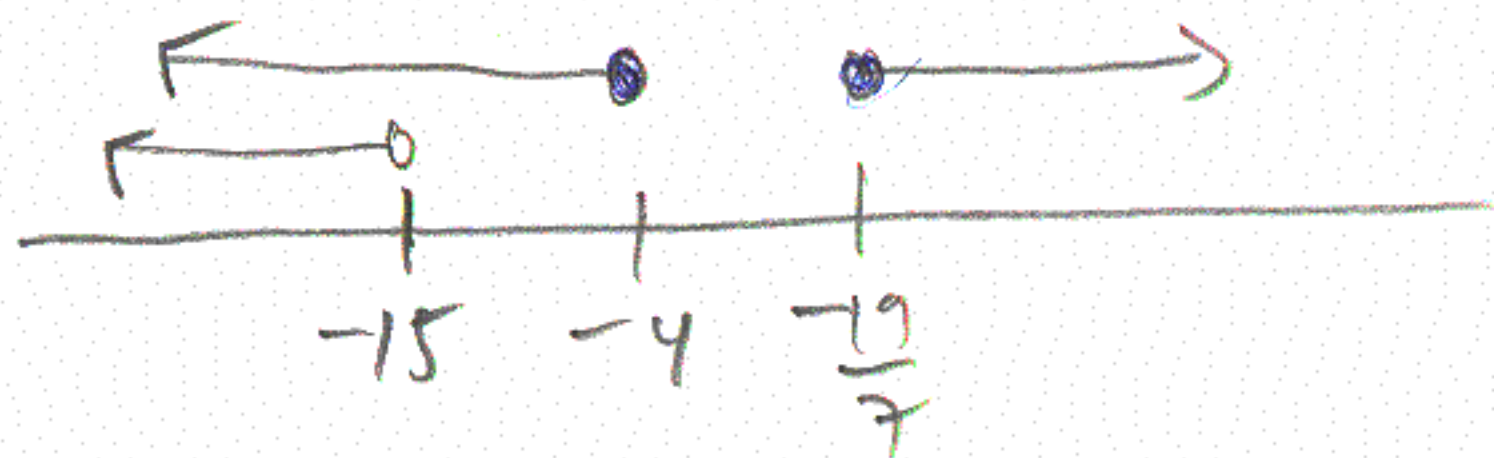
$$4a \leq -16$$

$$a \leq -4$$

$$4 + 6a + 15 + a \geq 0$$

$$7a \geq -19$$

$$a \geq -\frac{19}{7}$$



\emptyset

②

$$\alpha + \beta = 3a$$

$$\alpha\beta = 15 + a$$

$$(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) =$$

$$(\alpha\beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + 1$$

$$(\alpha\beta)^2 - [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] + 1$$

$$(15 + a)^2 - 9a^2 + 2(15 + a) + 1 =$$

$$225 + 30a + a^2 - 9a^2 + 30 + 2a + 1$$

$$\underline{\underline{-8a^2 + 32a + 256}}$$

$$\textcircled{K} \log_4 x + \log_x 2 - \log_4 \sqrt{x} \leq 1$$

(3 ηδκε)

$$\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

η.σ

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 2}{\log_2 x} - \frac{\frac{1}{2} \log_2 x}{\log_2 4} \leq 1$$

$$\log_2 x = t \quad \text{προσ}$$

$$\frac{2^t}{2} + \frac{1}{t} - \frac{t}{4} \leq 1$$

$$t = 2$$

$$t < 0$$

$$\frac{2t^2 - t^2 + 4}{4t} \leq 1$$

$$\log_2 x = 2$$

$$\log_2 x < \log_2 1$$

$$\textcircled{x=4}$$

$$x < 1$$

$$\frac{t^2 + 4 - 4t}{4t} \leq 0$$

$$\frac{(t-2)^2}{t} \leq 0$$

$$\begin{array}{c} - \quad + \quad + \\ | \quad | \quad | \\ 0 \quad 2 \\ \text{~} \end{array}$$

$$0 < x < 1$$

$$x = 4$$

2

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$$

(3 אפס)

בגלל אגזוק אט
היסטוריה

$$3x^2 - 2x + 15 = t$$

$$3x^2 - 2x + 8 = t - 7$$

$$\sqrt{t} + \sqrt{t-7} = 7$$

$$\sqrt{t} = 7 - \sqrt{t-7}$$

$$t = 49 + t - 7 - 14\sqrt{t-7}$$

$$14\sqrt{t-7} = 42$$

$$\sqrt{t-7} = 3$$

$$t-7 = 9$$

$$t = 16$$

$$3x^2 - 2x + 15 = 16$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$3x^2 - 3x + x - 1 = 0$$

$$3x(x-1) + 1(x-1) = 0$$

$$(x-1)(3x+1) = 0$$

$$x = 1$$

✓

$$x = -\frac{1}{3}$$

✓

177

(4 נקודות)

$$\textcircled{2} \quad 2 \left(16^{\log_9 x + 1} - 2^{4 \log_3 \sqrt{x}} \right) + 15 \cdot 4^{2 \log_3 x} \leq 15 \log_{\sqrt{5}} (5\sqrt{5})^{\sqrt{5}^3}$$

$$2 \left(2^{4(\frac{1}{2} \log_3 x + 1)} - 2^{4 \cdot \frac{1}{2} \log_3 x} \right) + 15 \cdot 2^{2 \cdot 2 \log_3 x} \leq 45$$

$$2 \left(2^4 \cdot 2^{2 \log_3 x} - 2^{2 \log_3 x} \right) + 15 \cdot 2^{4 \log_3 x} \leq 45$$

$$2 \cdot 15 \cdot 2^{2 \log_3 x} + 15 \cdot 2^{4 \log_3 x} - 45 \leq 0$$

$$\underline{2^{2 \log_3 x} = t : \text{נ"מ}}$$

$$15t^2 + 30t - 45 \leq 0$$

$$t^2 + 2t - 3 \leq 0$$

$$(t+3)(t-1) \leq 0 \Rightarrow$$

$$t \leq 1$$

$$2^{2 \log_3 x} \leq 2^0$$

$$2 \log_3 x \leq 0$$

$$\log_3 x \leq \log_3 1$$

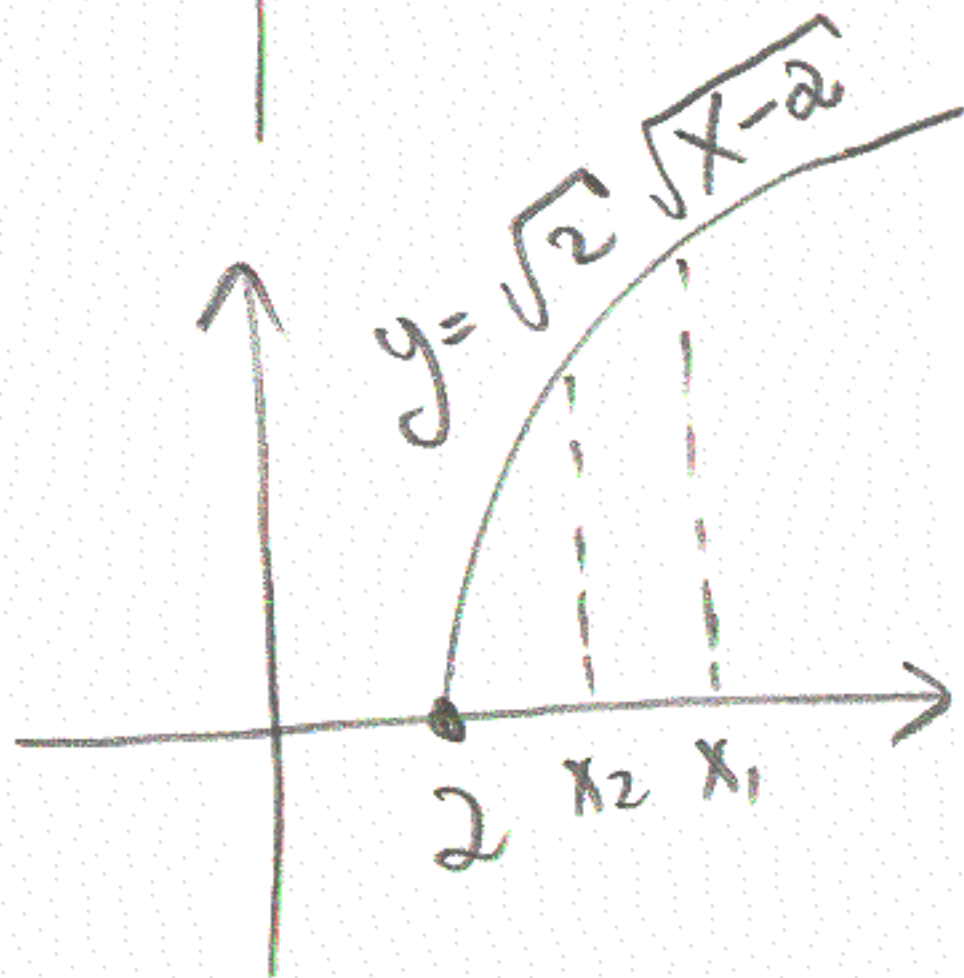
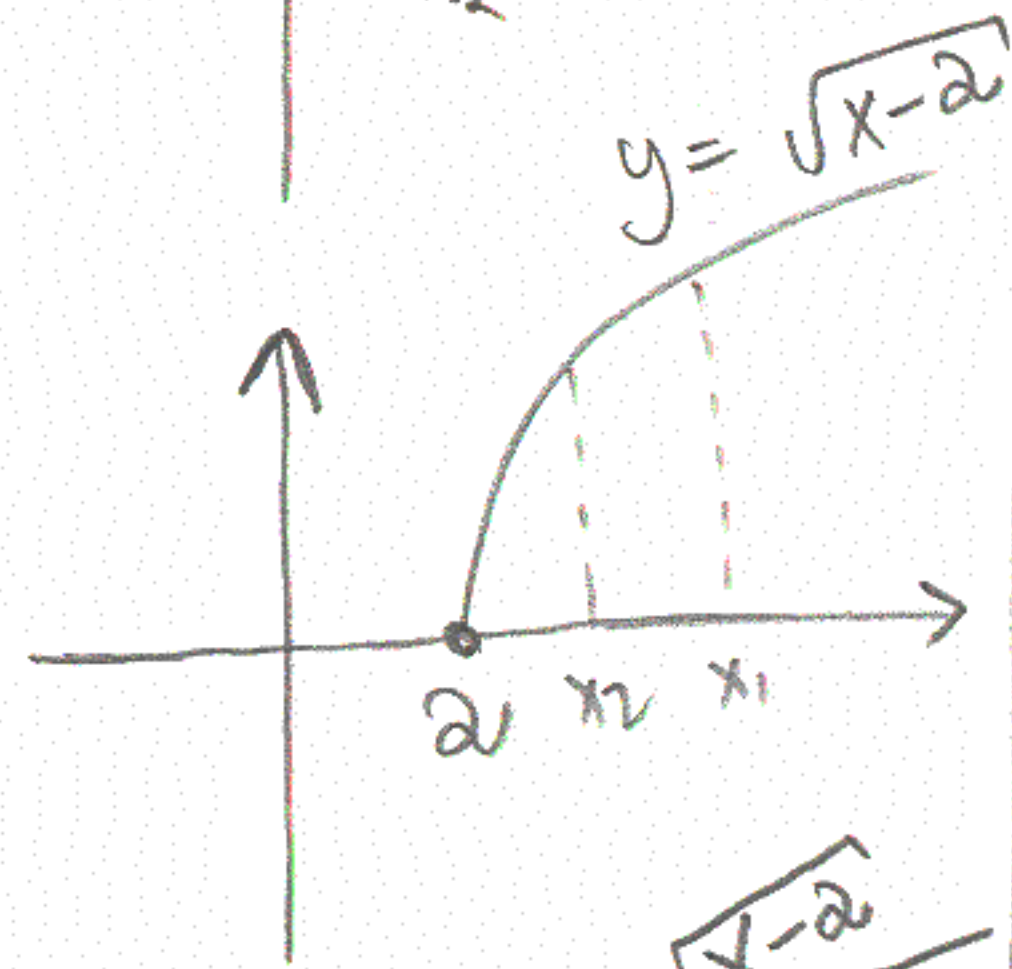
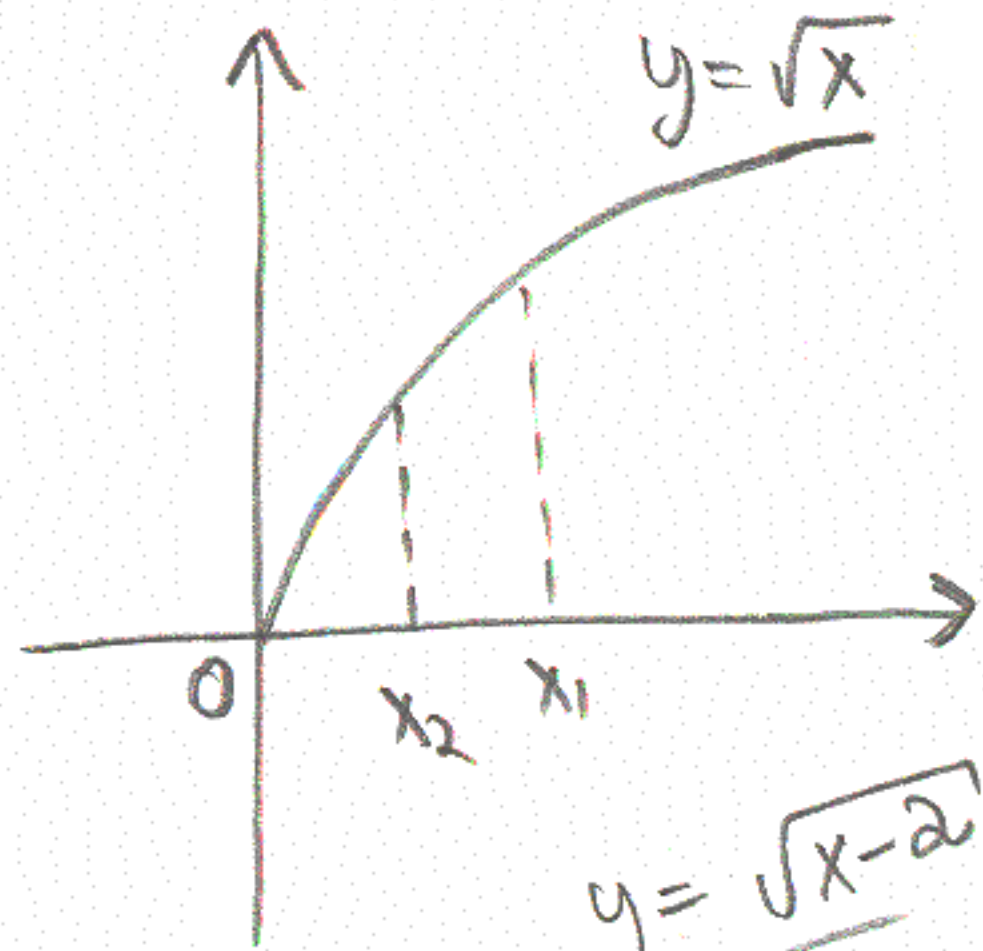
$$0 < x \leq 1$$



$$\log_9 x = \log_{3^2} x = \frac{1}{2} \log_3 x$$

$$\log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_3 x$$

↑
הנ"מ
הנ"מ
↑
הנ"מ



(k)

$$y_1 > y_2$$

ש"כ $x_1 > x_2$ $q.c$

הוכחה

"3"

$$\sqrt{2x_1 - 4} > \sqrt{2x_2 - 4}$$

$$\sqrt{2x_1 - 4} - \sqrt{2x_2 - 4} > 0$$

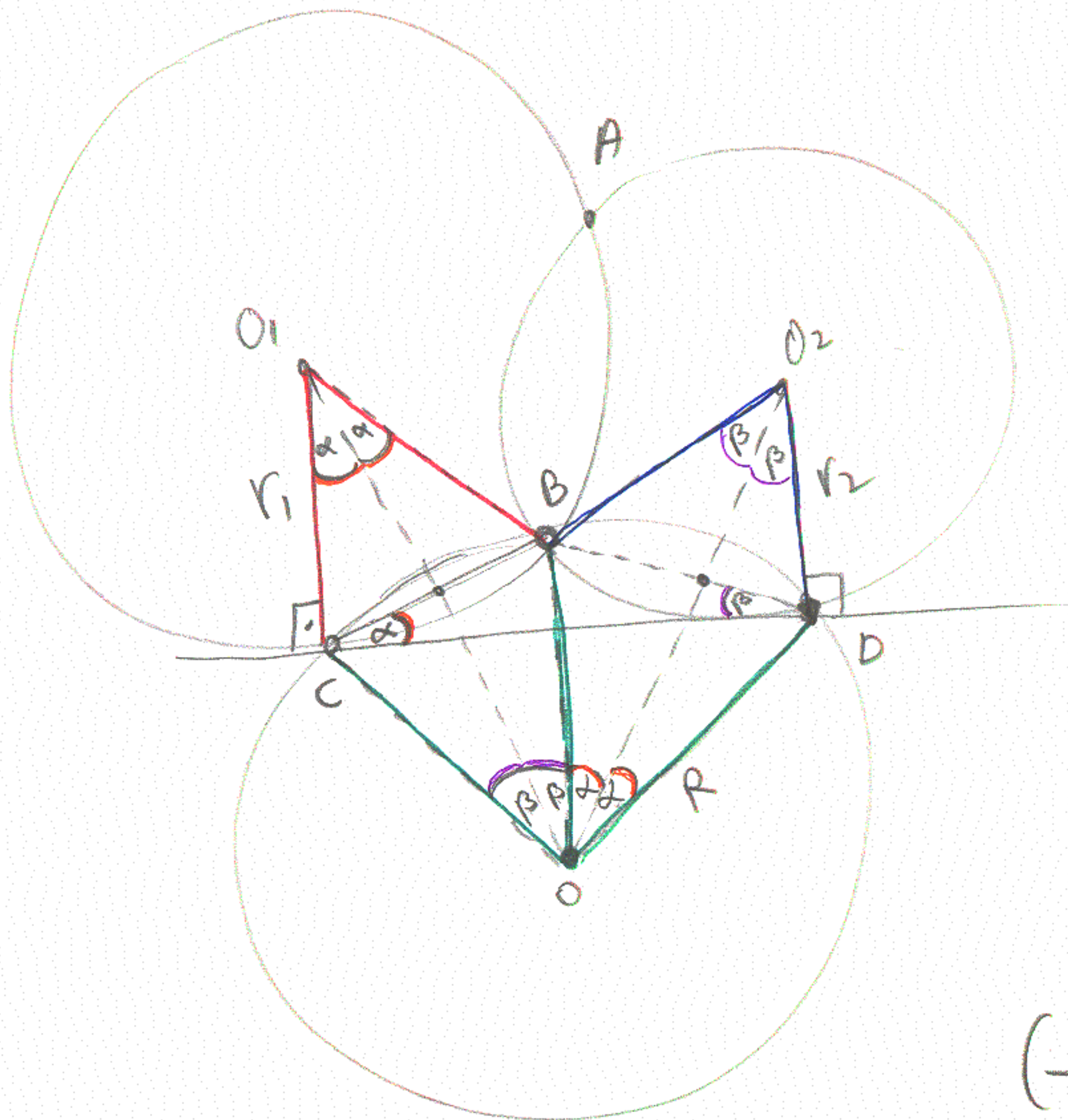
$$\frac{(\sqrt{2x_1 - 4} - \sqrt{2x_2 - 4})(\sqrt{2x_1 - 4} + \sqrt{2x_2 - 4})}{(\sqrt{2x_1 - 4} + \sqrt{2x_2 - 4})} > 0$$

$$x_1 - x_2 > 0$$

$$\frac{2x_1 - 4 - (2x_2 - 4)}{\text{מ"כ חיובי בהנחה הגז צברה}} = \frac{2(x_1 - x_2)}{\text{מ"כ חיובי בהנחה הגז צברה}} \Rightarrow \text{חיובי}$$

(עגולה 6)

(כ)



$$\begin{cases} O_1C = O_1B = r_1 \\ O_2C = O_2B = R \end{cases}$$

⇓

O_1CO_2B צמוד

⇓

O_1O_2 תווך את BC
(הוא כסוף הריבוי תווך
את הריבוי).

(ג)

כסוף: $\angle CO_1B = 2\alpha$

$\angle CO_1O_2 = \angle BO_1O_2 = \alpha$

(הוא כסוף הריבוי בזאת תווך שווה)

$\angle DCB = \alpha$

(שווה בין חסיק אחיד שווה
שחציות מהשווה החופים הריבוי של אלו אחיד)

2

$$\Delta O_1BO \sim \Delta OBO_2$$

↓

$$\frac{r_1}{R} = \frac{R}{r_2}$$

$$R^2 = r_1 \cdot r_2$$

$$R = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$$

המשקל ΔO_1BO ק':

$$\angle BOO_1 = 2 \angle DCB$$

(שני זוויות קבועות ב-2)

(מההקבועות של המשולש)

ב- ΔBOO_2 זוויות

(כאילו קבועות ΔBOO_2)

↓

$$\angle BOO_2 = \angle OOO_2 = \alpha$$

↓

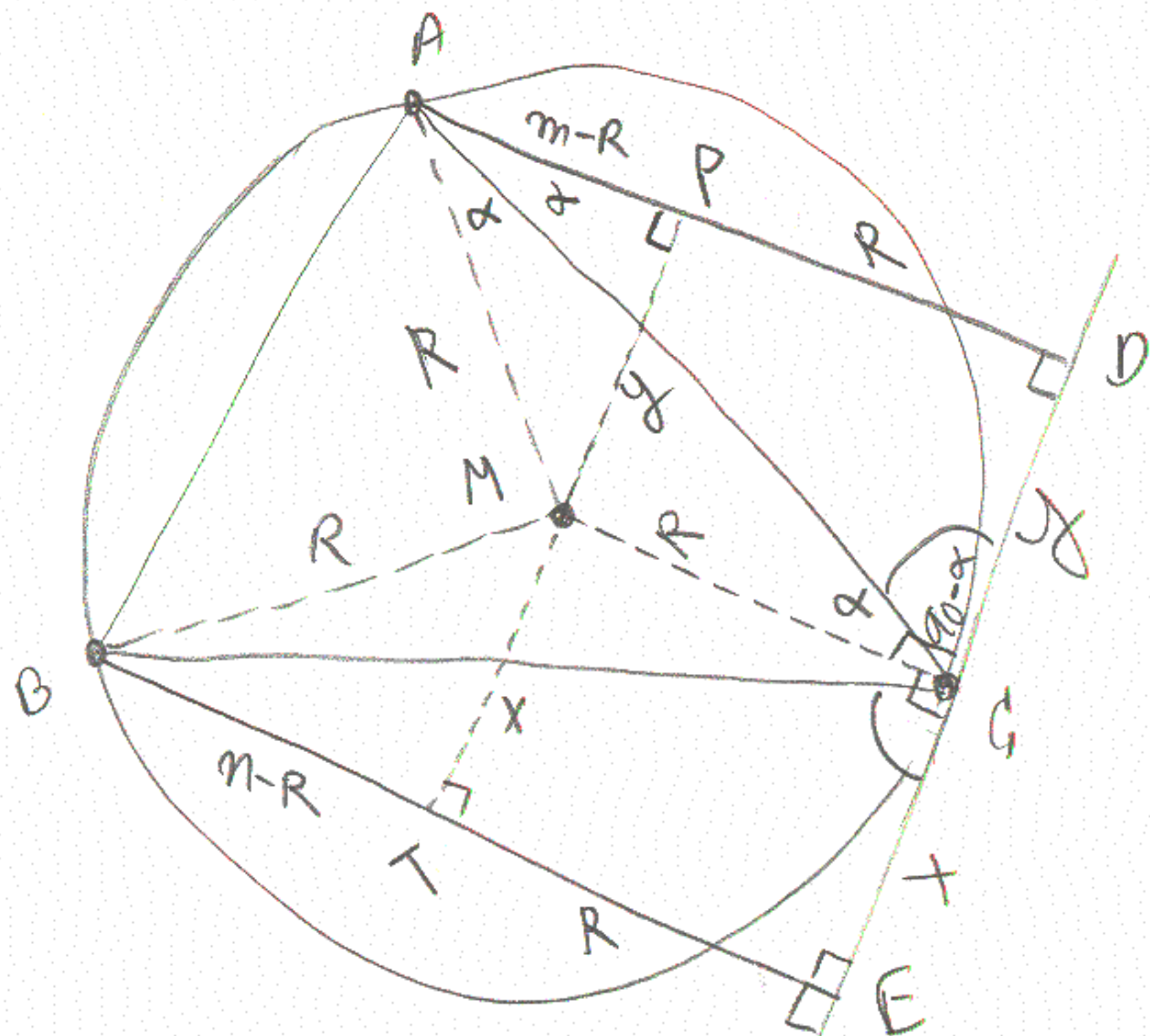
$$\angle BOO_2 = \angle BCO = \angle BO_1O = \alpha$$

סוף N

נמצא שזוויות קבועות:

$$\angle BOO_1 = \angle BCO = \angle BO_2O = \beta$$

15 ארבע



$$CE = \sqrt{n(2R-n)}$$

15

$$CD = \sqrt{m(2R-m)}$$

$$n = 9, m = 16, 2R = 25$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \sqrt{9(25-9)} = \sqrt{9 \cdot 16} = 12 \\ y &= \sqrt{16(25-16)} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12 \end{aligned} \right\} 24$$

ΔAMP : 01210

$$(m-R)^2 + y^2 = R^2$$

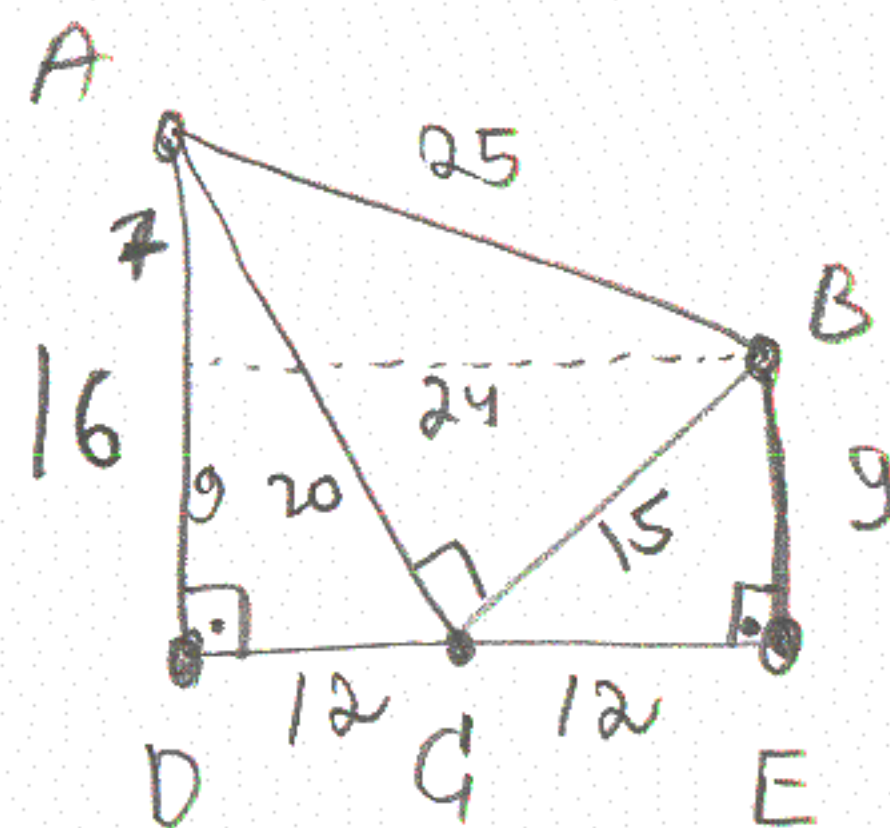
$$y^2 = R^2 - m^2 + 2mR - R^2$$

$$y = \sqrt{m(2R-m)}$$

ΔBMT : 01210

$$(n-R)^2 + x^2 = R^2$$

$$X = \sqrt{n(2R-n)}$$



$$\frac{15 \cdot 20}{2} = \boxed{150} //$$